1　二項分布から正規分布へ

二項分布はと正規分布はそれぞれ

$$B_p(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \tag{1}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{2}$$

で与えられます[*1]。二項分布は N が非常に大きいとき、$p = 1/2$ の近くで正規分布で近似できることを直感的に導きます。

二項分布で $x = \frac{n-x_0}{\sigma}$ と置くと (正規分布の標準化です)、x は離散数ですが N が大きいところでは連続とみなして良いでしょう。このとき

$$\Delta n = \sigma \Delta x = \frac{\sqrt{N}}{2} \Delta x \tag{4}$$

なので[*2]、x の分布を $f(x)$ とすると

$$\begin{aligned} f(x)\Delta x &= B_{\frac{1}{2}}(n)\Delta n \quad (6) \\ &= \frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^N \cdot \frac{\sqrt{N}}{2}\Delta x \quad (7) \end{aligned}$$

となるので、$N \to \infty$ で

$$f(x) \to N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{8}$$

を示せばいいことになります。

まずは、階乗を Stiring の公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{9}$$

を使って近似すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi(N-n)}\left(\frac{N-n}{e}\right)^{(N-n)}} \frac{1}{2^N} \cdot \frac{\sqrt{N}}{2} \quad (10) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(N-n)^{N-n+\frac{1}{2}}} \left(\frac{N}{2}\right)^{N+1} \quad (11) \end{aligned}$$

となります。ここで $x = \frac{n-x_0}{\sigma}$ を n について解いた

$$n = \frac{N}{2} + \frac{\sqrt{N}}{2} x \tag{12}$$

---

*1

$$\binom{N}{n} = {}_N C_n \tag{3}$$

*2　二項分布の平均と分散はそれぞれ

$$x_0 = Np\left(= \frac{N}{2}\right) \qquad \sigma^2 = Np(1-p)\left(= \frac{N}{4}\right) \tag{5}$$

です。

を使って n を消去すると

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{N}{2} + \frac{\sqrt{N}}{2}x\right)^{\frac{N}{2}+\frac{\sqrt{N}}{2}x+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{N}{2} - \frac{\sqrt{N}}{2}x\right)^{\frac{N}{2}-\frac{\sqrt{N}}{2}x+\frac{1}{2}}} \left(\frac{N}{2}\right)^{N+1} \tag{13}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\left(1 + x/\sqrt{N}\right)^{\frac{N}{2}+\frac{\sqrt{N}}{2}x+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(1 - x/\sqrt{N}\right)^{\frac{N}{2}-\frac{\sqrt{N}}{2}x+\frac{1}{2}}} \tag{14}$$

となります。指数の部分を計算しやすくするために f(x) の対数をとり、ln の 2 次まで展開する*3と

$$-\ln\left(\sqrt{2\pi}f(x)\right) = \left(\frac{N}{2} + \frac{\sqrt{N}}{2}x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{N}}\right) + \left(\frac{N}{2} - \frac{\sqrt{N}}{2}x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{x}{\sqrt{N}}\right) \tag{16}$$

$$\sim \left(\frac{N}{2} + \frac{\sqrt{N}}{2}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{N}} - \frac{x^2}{2N}\right) + \left(\frac{N}{2} - \frac{\sqrt{N}}{2}x + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{\sqrt{N}} - \frac{x^2}{2N}\right) \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^2}{2N}\frac{1}{2}x^2 \tag{18}$$

のようになります。$N \to \infty$ で第 2 項は消えるので

$$f(x) \to N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{19}$$

が証明できました。

*3

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots \tag{15}$$