1 Wigner-Eckart の定理

ある決まった角運動量をもった状態間のテンソル成分の行列要素を議論するのに、Wigner-Eckart の定理は行列要素 $\langle \beta j'm'|\hat{T}^k_q|\alpha jm\rangle$ の m 依存性 (射影量子数依存性) を全て Clebsch-Gordan 係数が担うことを示している。text P.36 (2.169) に従うと

$$\langle \beta j'm'|\hat{T}^k_q|\alpha jm\rangle = (-1)^{2k}(jkj'|mqm')\,\langle \beta j'||\hat{T}^k||\alpha j\rangle \tag{1}$$

である。ここで $\langle \beta j'||\hat{T}^k||\alpha j\rangle$ は換算行列要素で、q、m および m' に依存しない。

証明

交換関係

$$[\hat{J}_z, \hat{T}^k_q] = q\hat{T}^k_q \quad , \quad [\hat{J}_\pm, \hat{T}^k_q] = \sqrt{(k\pm q+1)(k\mp q)}\;\hat{T}^k_{q\pm 1} \tag{2}$$

に左から $\langle j'm'|$、右から $|jm\rangle$ を掛けると、1 つ目の交換関係は

$$\langle j'm'|\hat{J}_z\hat{T}^k_q|jm\rangle - \langle j'm'|\hat{T}^k_q\hat{J}_z|jm\rangle = q\,\langle j'm'|\hat{T}^k_q|jm\rangle \tag{3}$$

J_z を作用させると

$$m'\,\langle j'm'|\hat{T}^k_q|jm\rangle - m\,\langle j'm'|\hat{T}^k_q|jm\rangle = q\,\langle j'm'|\hat{T}^k_q|jm\rangle \tag{4}$$

となる。整理すると

$$(m'-m-q)\,\langle j'm'|\hat{T}^k_q|jm\rangle = 0 \tag{5}$$

よって、$m' = m+q$ でないと $\langle j'm'|\hat{T}^k_q|jm\rangle = 0$ である。これは射影量子数保存則を表わしている。次に (2) 式の 2 つ目の交換関係の行列要素は

$$\langle j'm'|\hat{J}_\pm\hat{T}^k_q|jm\rangle - \langle j'm'|\hat{T}^k_q\hat{J}_\pm|jm\rangle = \sqrt{(k\pm q+1)(k\mp q)}\,\langle j'm'|\hat{T}^k_{q\pm1}|jm\rangle \tag{6}$$

$J_\pm$ をそれぞれ作用させると

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(j'\mp m'+1)(j'\pm m')}\,\langle j'm'\mp 1|\hat{T}^k_q|jm\rangle \\
&\qquad - \sqrt{(j\pm m+1)(j\mp m)}\,\langle j'm'|\hat{T}^k_q|jm\pm 1\rangle \\
&\qquad\qquad = \sqrt{(k\pm q+1)(k\mp q)}\,\langle j'm'|\hat{T}^k_{q\pm1}|jm\rangle
\end{aligned} \tag{7}$$

となる。ここでそれぞれの項は $m' = q+m\pm 1$ でないところではゼロである。この関係を見るために、角運動量の合成を考える。$\vec{j}+\vec{k}=\vec{j'}$ は Clebsch-Gordan 係数を用いて

$$|j'm'\rangle = \sum_{mq}(jkj'|mqm')\,|jmkq\rangle \tag{8}$$

となる。$J_\mp$ を作用させると

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(j'\mp m'+1)(j'\pm m')}\,|j'm'\mp 1\rangle \\
&\qquad = \sum_{mq}\sqrt{(j\mp m+1)(j\pm m)}(jkj'|mqm')\,|jm\mp 1kq\rangle \\
&\qquad\qquad + \sum_{mq}\sqrt{(k\mp q+1)(k\pm q)}(jkj'|mqm')\,|jmkq\mp 1\rangle
\end{aligned} \tag{9}$$

左辺を (8) 式で展開し、右辺の第 1 項で $m \mp 1 \to \mu$, $q \to \lambda$ とし、第 2 項で $m \to \mu$, $q \mp 1 \to \lambda$ とすると (各項の次数をあわせている)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mu\lambda} \sqrt{(j' \mp m' + 1)(j' \pm m')}(jkj'|\mu\lambda m' \mp 1)\,|j\mu k\lambda\rangle \\
&\qquad = \sum_{\mu\lambda} \sqrt{(j \pm \mu + 1)(j \mp \mu)}(jkj'|\mu \pm 1\lambda m')\,|j\mu k\lambda\rangle \\
&\qquad\qquad + \sum_{\mu\lambda} \sqrt{(k \pm \lambda + 1)(k \mp \lambda)}(jkj'|\mu\lambda \pm 1m')\,|j\mu k\lambda\rangle
\end{aligned} \tag{10}
$$

両辺の $\mu = m$, $\lambda = q$ の係数を等しいとおくと

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(j' \mp m' + 1)(j' \pm m')}(jkj'|mqm' \mp 1) \\
&\qquad - \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)}(jkj'|m \pm 1qm') \\
&\qquad\qquad = \sqrt{(k \pm q + 1)(k \mp q)}(jkj'|mq \pm 1m')
\end{aligned} \tag{11}
$$

これは射影量子数の変化に対する Clebsch-Gordan 係数の漸化式である。(7) 式と比較してみると、テンソル行列要素と Clebsch-Gordan 係数の射影量子数に対する依存性が、両方の式で等しいことがわかる。また、両方の式で、すべての項は $m' = q + m \pm 1$ でない限りゼロとなる。ゆえに射影量子数に対する依存性は Clebsch-Gordan 係数によって与えられる。

参考図書：角運動量の基礎理論 (ローズ)